



مجلة السعيد للعلوم الإنسانية والتطبيقية
Al - Saeed Journal of Humanities and Applied Sciences
journal@alsaeeduni.net

المجلد (6)، العدد (1)، 2023م
ISSN: 2616 – 6305 (Print) ISSN: 2790-7554 (Online)



مفهوم المستقيم المماس لدى طلبة المستوى الأول في قسم الرياضيات بكليات التربية جامعة عدن

د/ صوفيا مهدي محسن الهدار السقاف
أستاذ طرق تدريس الرياضيات المساعد
جامعة عدن كلية التربية - قسم الرياضيات
Sofiaalhaddar@gmail.com

تاريخ تسليم البحث 2022/12/4م تاريخ قبوله للنشر 2023/1/11م

<https://alsaeeduni.net/colleges/research-and-strategic/2017-03-10-08-03-59>

مفهوم المستقيم المماس لدى طلبة المستوى الأول في قسم الرياضيات بكليات التربية جامعة عدن

د/ صوفيا مهدي محسن الهدار السقاف
أستاذ طرق تدريس الرياضيات المساعد
جامعة عدن كلية التربية - قسم الرياضيات

ملخص

هدف هذا البحث إلى التعرف على مستوى معرفة طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس، وصورة المفهوم التي يمتلكها هؤلاء الطلبة لهذا المفهوم. وتكونت عينة البحث من طلبة المستوى الأول وعددهم (11) طالباً وطالبة، وتم استخدام المنهج الوصفي التحليلي، اعتمدت الباحثة لقياس المعرفة الخاصة بمفهوم المماس على استبانة صممت لهذا الغرض من قبل (Biza, et, al., 2008). وأظهر البحث وجود ضعف في مستوى معرفة طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات لمفهوم المستقيم المماس، كما يمتلك طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات صورة مشوشة وغير مكتملة لمفهوم المستقيم المماس.

ومن أهم توصيات البحث التركيز على تقديم التعريف الشامل للمستقيم المماس في التعليم الثانوي والجامعي وتجنب التعريفات المختصرة لهذا المفهوم، رأب الفجوة المعرفية المتعلقة بتعلم مفهوم المماس لدى طلبة المستوى الأول لتغطية المفهوم من خلال أنشطة وفعاليات تدريسية إضافية، وإدخال تعديلات على المحتوى الذي يتعلق بالمماس في كتب الثانوية العامة عند عملية تطوير المناهج بحيث يشمل التعديل التقديم الواضح والعميق لهذا المفهوم.
الكلمات المفتاحية: المفهوم، المستقيم المماس.

Concept of Tangent Line Among First Year Students of Mathematics Department - Faculties of Education - University of Aden

Dr. Sofia Mehdi Mohsen Al-Haddar Al-Sakaf

Associate Professor of Curricula and Teaching Methods
Mathematics Department- Faculty of Education University of Aden

Abstract

This research aims to investigate the level of knowledge of the concept of tangent line among first year students of mathematics departments – faculty of education - university of Aden and their concept image for this concept. Study sample consists of (11) students of first year of mathematic department – faculty of education- Aden. The researcher used the descriptive analytical method. For the purpose of the research the researcher used a questionnaire prepared by (Biza, et.al., 2008) to investigate students' knowledge of tangent line .

The research shows weakness of students' knowledge of tangent line, confused and incomplete concept image of the tangent line. The research recommends focusing on the general definition of tangent line, and avoiding shortcut definitions, mending the cognitive gaps of learning the concept of tangent line of first year students by additional teaching and learning activities. Also the research recommend to implicate shuffles to the content of tangent line in secondary school mathematics text books while development process of the curricula, so these shuffles include clear and deep introduction of the tangent line concept.

Key words: concept, tangent line.

مقدمة:

تعد المفاهيم الرياضية اللبنة الأساسية في المحتوى الرياضي وتعد المعرفة الصحيحة لهذه المفاهيم الأساس الصحيح لأي تعلم لاحق سواء مفاهيم أوسع أو تعميمات أو مهارات ومسائل مرتبطة بها.

والنظرة التربوية الحديثة لتدريس الرياضيات كما وصفها (عباس، 2014) تركز على معرفة المفاهيم التي تتضح من خلال فهم الطلاب للأفكار الرياضية والعلاقات المتداخلة بين تلك الأفكار والقدرة على ربط تلك الأفكار ربطا يدل على المعنى للوصول إلى التصور النهائي. ولهذا يرى (الشرييني وصادق، 2005) أن عملية تكوين المفهوم الرياضي يجب أن تتم بصورة صحيحة وراسخة وإلا فإن المعرفة التي يتم اكتسابها في مراحل التعليم اللاحقة تبقى مشوشة لأنها تفقد الأرض الصلبة التي تستند إليها.

ورغم أن لحساب التفاضل والتكامل حقلا واسعا من التطبيقات في مجالات أخرى ويعد جزءا أساسيا من مناهج الرياضيات في التعليم الثانوي، وتشكل معارف التفاضل والتكامل أساسا لدراسة ناجحة في كثير من مواد الجامعة، فإن الأبحاث تشير إلى أن أغلبية الطلبة يواجهون مشكلات حقيقية في فهم المفاهيم الأساسية في التفاضل والتكامل (Harel, et, al., 2006).

إن مفهوم المماس يؤدي دورا مهما في الرياضيات خاصة في الهندسة وحساب التفاضل والتكامل، حيث يعد الأساس لتعلم مفهوم المشتقة، ولتفسير الكثير من النظريات هندسيا، ولكنه كغيره من المفاهيم الأساسية في الرياضيات التي تشكل صعوبة لدى المتعلمين، فوفقا لما ذكره (Tall, 1987) يعد مفهوم المماس مفهوما معقدا، ويسبب صعوبات عندما يظهر في ملابسات حرجة، فالخبرات المبكرة عن المماس في هندسة الدائرة تقدم تصور أن المماس هو مستقيم يمس المنحنى في نقطة واحدة ولا يقطع (يعبر) المنحنى، هذا ينتج صورة للمفهوم (concept image) تسبب تعارض معرفي عندما تظهر حالات خاصة في عين الاعتبار، مثلا الحالة التي يكون فيها المماس عند نقطة انعطاف، حيث أنه يقطع المنحنى، أو في حالة المماس في حالة الرؤوس الحادة (cusp).

يظهر مفهوم المماس في سياقات مختلفة تعتمد على المستوى الدراسي في الثانوية العامة، يؤدي إلى إرباك الطلاب خلال الانتقال من الهندسة الإقليدية إلى التحليل، وهذا الاختلاف يؤثر على إدراك الطلاب، فالمفهوم الأول للمماس يقدم بشكل مبكر في الهندسة الإقليدية، لاحقا يعطى التعريف المعياري للمماس، والطلبة في البداية يبنون صورة مفاهيمية للمماس تعتمد على الحقيقة التي تقول أن مماس الدائرة يتشارك معها في نقطة واحدة فقط، والطلاب ربما يطبقون هذه الفكرة

على الدالة، ويفترضون أن المماس لا يمكن أن يقطع أو يرافق الدالة في مكان آخر (Stavropoulos & Toultsinaki, 2010).

إن التتبع التاريخي لمفهوم المستقيم المماس يمكن أن يقدم وجهة نظر مفيدة عن الصعوبات التي يواجهها الطلاب في تعلم هذا المفهوم، فبالرغم من أن التعريف الأول للمماس؛ مماس الدائرة، ثم لاحقا للقطوع المخروطية جاء مبكرا في تاريخ الرياضيات، إلا أن ظهور تعريف أكثر عمومية للمماس جاء فقط في القرن السادس عشر، حيث يظهر مفهوم المماس في ثلاث مراحل في دراسة الطالب، في البداية في الهندسة الإقليدية، حيث يتعلم الطلبة مماس الدائرة كخط مستقيم لديه بالضبط نقطة واحدة مشتركة مع الدائرة، وبشكل حدسي تعني الخاصية السابقة أن المستقيم لديه نقطة مشتركة مع الدائرة ويقسم المستوى إلى جزأين، أحدهما يحتوي الدائرة كاملة، لاحقا، في الهندسة التحليلية، يتعلم الطلاب القطوع المخروطية، وفي هذه الحالة يصبح تعريف المماس أكثر تعقيدا: "المماس عند نقطة A هو نقطة نهاية للقاطع AB، كلما اقتربت B من A، وهنا تظل خاصية "النقطة الواحدة المشتركة" صحيحة في القطوع، لكن ليست كافية لتعريف المماس، حيث توجد مستقيمات لديها نقاط مشتركة واحدة مع القطع المكافئ والقطع الزائد ولكنها ليست مماسات، ومن جهة أخرى فإن خاصية "النقطة الواحدة المشتركة والوقوع في نصف مستوى صادقة لكل القطوع عدا القطع الزائد، حيث يفصل المماس فرعي القطع، ونتيجة لذلك يمكننا أن نقول أن الخاصية تظل صادقة حتى في حالة القطع الزائد لكل فرع على حدة (بشكل منفصل)، ولذلك ليس من الضروري للطلاب أن يغيروا الصورة الحدسية السابقة عن الخاصيتين المتعلقةتين بمماس الدائرة "نقطة واحدة مشتركة بالضبط" و"نقطة مشتركة والحلول في أحد نصفي المستوى"، إن تحويل بسيط في معتقدتهم يكفي لاستيعاب المعرفة الجديدة عن مماس القطوع في معرفتهم الحالية (الموجودة) عن مماس الدائرة K في هذه الحالة، فقط يحتاج الأمر إلى إثراء للمعرفة الأولية المتعلقة بالمماس، أخيرا في التفاضل والتكامل (Calculus)، يصطدم الطلاب بمفهوم المماس عند نقطة لمنحنى، في هذا المستوى يعرف مماس المنحنى من خلال مفهوم المشتقة، في الحقيقة، هذا التعريف هو التعريف نفسه في حالة القطوع المخروطية، الفرق هو أن أي من الخواص السابقة لا يبقى صادقا بشكل عام، حيث توجد دوال لديها مماسات بحيث تكون هناك أكثر من نقطة تقاطع واحدة مع المنحنى و/أو تقسم المنحنى إلى جزأين أو أكثر، وينتج عن كل ذلك أن العديد من الطلاب يكون لديهم صورة مفهوم للمماس تتضمن صورة ما يشبه الدائرة (circle-like pictures)، وصورة هذا المفهوم تحتوي تمثيلا جزئيا للمماس والذي يمكن أن يسمى المماس العام وهذا المماس العام يعمل كنموذج مثالي (a paradigmatic model) والذي لا يشكل مثلا لمفهوم المماس بشكل عام ولكنه مثال خاص وجزئي تم قبوله كممثل لكل أنواع المماسات (Biza, et, al., 2005).

وقد أوضح (Tall & Vinner, 1981) أن صورة المفهوم هي بنية معرفية إدراكية شاملة و كلية تتألف مع المفهوم، والتي تتضمن الصور الذهنية، الخواص ذات الصلة، والعمليات التي يحملها الطلاب معهم والتي تؤثر في العمليات الذهنية والعقلية، من ناحية أخرى فإن تعريف المفهوم هو سلسلة من الكلمات تستخدم لتعطي معنى للمفهوم، وأشار إلى أن صورة المفهوم تبنى خلال سنوات من الخبرة، وتتغير عندما يقابل الأفراد مثيرات جديدة وأكثر نضجا، فمعظم المفاهيم التي نستخدمها تكون غير معرفة بشكل رسمي إطلاقا، وإنما نتعلم أن ندركها من خلال الخبرة والاستخدام في سياقات مناسبة، لاحقا هذه المفاهيم يمكن أن تصقل في معناها وتفسر بشكل أكثر دقة سواء بوجود أو عدم وجود تعريف أساسي (صوري formal).

ويرى (Vincent & Sealy, 2015) أنه في حين نأخذ بعين الاعتبار المماسات فإن الخاصية التي يحددها تعريف مماس الدائرة، الذي يقطع الدائرة مرة واحدة فقط، تحولت إلى تعريف ضمني ومضمّر للمماسات بشكل عام، وهذا متعارض مع تعريف المماس عندما نتعامل مع الدوال، حيث أن المماس يمكن أن يقطع المنحنى عدة مرات أو حتى يتراقق مع الدالة، صورة المفهوم بالنسبة للمماس التي تكتسب من خلال تعلم الهندسة تعتبر مسارا معمما، وتغيير هذا يتطلب إعادة بناء صعب للصورة المفاهيمية.

وفي دراسة (Vincent & Sealy, 2015) تم تلخيص بعض النتائج من دراسات سابقة امتدت من عام 1987 إلى 2014 عن موضوع المماس ومن هذه النتائج: (1) لقد تم التوثيق وبشكل جيد في العديد من المراجع أن تجربة الطلاب لمفهوم التماس في الهندسة هو السبب السلبي الكامن الذي أثر على فهمهم للتماس في أطر لاحقة (2) في حين أكدت بعض الدراسات أن تطور مفهوم التماس تشكل من خلال استخدامه في التحليل بشكل صعب وغير حدسي (3) في حين حددت دراسات أخرى أن الفهم الخاطئ لدى الطلاب كان باعتبار أنه من الممكن وجود عدد من مستقيمت التماس عند نقطة واحدة أو الخلط بين مفهوم المماس ودالة الظل $y = \tan x$ (4) أن الطلاب يفضلون التعامل مع مفهوم المشتقة جبريا، وغالبا ما يعانون في الجانب البصري (5) يجد الطلاب صعوبة في تفسير التعريف الرسمي الصوري للمشتقة بيانيا (6) بعض الطلاب يرتبك في تحديد العلاقة بين المستقيم المماس والمشتقة، كذلك بين الإحداثي الصادي والمشتقة أو معادلة المستقيم المماس والمشتقة، وفي تضمينات لتدريس هذا المفهوم أوصتها هذه الدراسة هي أن التعريفات المختصرة للتماس مثل "المستقيم الذي يمس المنحنى في نقطة واحدة"، وحتى "المستقيم الذي ميله يساوي المشتقة" جميعها مفيدة لكن يجب ألا تحل محل تعريف التماس كنقطة نهاية للمستقيمت القاطعة (limiting position of secant lines)، وأن الصفوف الدراسية التي تتمسك بالتعريفات المختصرة يمكن أن تؤدي إلى خلق أشياء زائفة في صورة مفهوم المستقيم المماس والمشتقة لدى الطلبة.

وتفيد الأبحاث حول الصعوبات التي تواجه الطلاب في تكوين معنى للمستقيم المماس لمنحنى الدالة، أن هذه الصعوبات تعزى لاصطدام الطلاب بمفهوم المستقيم المماس في عدة سياقات رياضية (مثلا، الهندسة الإقليدية، الهندسة التحليلية والتحليل)، والانفصال بين المداخل الجبرية والتحليلية (مثلا، معدل التغير، الميل "ميل المماس slope"، المشتقة، وصيغة "معادلة" المستقيم المماس)، والمداخل البيانية (مثلا، الوضع النهائي (نقطة نهاية limiting position) للقاطع، التمثيل البصري للمماسات)، والفرق بين النظرة الشاملة (a global perspective) وهي علاقة المستقيم بالمنحنى ككل) والنظرة المحلية (local perspective) وهي علاقة المستقيم بالمنحنى في نقطة معينة)، كما أن معظم الحالات التي تشكل تحديا هي: عندما يكون للمماس أكثر من نقطة مشتركة مع المنحنى (مثلا، $f(x) = \sin x$ عند $\frac{\pi}{4}$)، أو مع منحنى القاطع أو جزء منه (مثلا عندما يكون المنحنى خطا مستقيما)، التماس عند نقاط الانعطاف (مثلا، $f(x) = x^3$ عند $x=0$)، النقاط حيث النهاية عن اليمين والنهاية عن اليسار عددين حقيقيين مختلفين (مثلا، $f(x) = |x|$ عند $x=0$)، أو مالانهاية (مثلا، $f(x) = \sqrt{|x|}$ عند $x=0$) (Biza, et, al. 2008; Park, 2015; Vinner, 1991).

مما سبق يتضح أثر المعرفة السابقة في تشكيل المعرفة اللاحقة لمفهوم المستقيم المماس. وأن هذا المفهوم على أهميته يشكل تحديا لدى الطلبة لعدة أسباب منها أولا: أنه يقدم في سياقات مختلفة، ثانيا: تأثير هذه السياقات والتعريفات غير المكتملة التي يقدم بها هذا المفهوم في كل سياق، ثالثا: التركيز على المعالجة الرمزية على حساب المعالجة البيانية، رابعا: ارتباط مفهوم المستقيم المماس مفاهيم أخرى كالمشتقة والظل والتي تتداخل لدى الطلاب الذين لم يكتسبوها بشكل جيد.

دراسات سابقة:

دراسة (Tall, 1986) في بريطانيا والتي هدفت لاختبار الفرضية التي تقول أن برامج الحاسوب التفاعلية تدعم شرح المعلم وتساعد في استنتاج الطلبة لعدد واسع ومتنوع من الأمثلة واللامثلة، وأنه يمكن أن يساعد الطلبة في تطوير صورة مفهوم أغنى وقابل للاستجابة لمواقف جديدة بطريقة مناسبة أكثر، وتم استخدام ثلاث صفوف تجريبية من عمر 16 عاما، تم تدريسهم باستخدام حزم حاسوب تساعد على تمييز فيما إذا كانت المنحنيات تبدو مستقيمة (looked straight) ورسم مستقيم خلال نقطتين متقاربتين على المنحنى، وقد شكل هذا الأساس للنقاشات الصفية، واستنتاج المجموعات الصغيرة لتشجيع تشكل علاقة مترابطة بين مفاهيم الميل والمماس، وللمقارنة تم تدريس خمسة صفوف أخرى بالطريقة التقليدية، ومن خلال الاستبيانان الذين أعطيا خلال الكورس تم التأكيد على أن طلبة المجموعات التجريبية كانوا قادرين على الاستجابة بشكل مناسب أكثر في

المواقف الجديدة، مثلاً في حالة عندما تكون الدالة المعطاة بصيغ مختلفة عن اليمين اليسار، ومع ذلك فإن الانطباع الذي يتضمن فكرة المماس العام (generic tangent a) أي المستقيم المتخيل الذي يمس المنحنى في نقطة واحدة فقط (حتى في حالة عدم مناسبة ذلك)، بقي موجوداً في كلا المجموعتين، ولكن بدلالة أقل خلال طلبة المجموعة التجريبية.

دراسة (Tall, 2002) والتي أوضح فيها ما المقصود بالمدخل التجسدي في الرياضيات من خلال بناءه ومقارنته مع مدخلين آخرين، المدخل الإدراكي (معالجة الرموز كعملية ومفهوم)، والمدخل المسلماتي القائم على التعريف والبرهان الصوريين، وأوضح أن لكل مدخل من هذه المداخل معيارها في الصدق (truth)، وناقش كيف أن الأسلوب التجسدي رغم أنه ينقصه البرهان الرياضي عندما يستخدم وحده، إلا أنه يزود بأسس إنسانية أساسية ومبدئية لمعاني المفاهيم في الرياضيات، وقدم الباحث أمثلة للمدخل التجسدي في التفاضل ومنها المماس مستخدماً في ذلك تقنية الحاسوب. دراسة (Moreira & Pinto, 2004) في البرازيل والتي هدفت إلى استنتاج جوانب من التصورات الرياضية حول مفهوم المستقيم المماس والتي تنشأ من التطبيقات العملية في المقررات المهنية في المدارس التقنية، واستخدم منهج البحث الكيفي، وتمثلت أداة جمع البيانات في الملاحظة غير المباشرة (non-participant observation) لثمانية صفوف دراسية لمدة خمسة أشهر، وتحليل استجابات الطلبة المكتوبة على استبيان قدم لهم في نهاية فترة الملاحظة للمقرر، كذلك تم إجراء المقابلات شبه المنظمة (semi-structured interviews) مع ثمان مجموعات من ستة طلاب تم اختيارهم وفقاً لاستجاباتهم للاستبيان، وأشارت النتائج أن الطلبة يميلون للتأكيد على ثقافتهم التخصصية المستقبلية من خلال التطبيقات العملية المدرسية والتي تكون قريبة بالنسبة لتلك التي تمت ملاحظتها ووصفها في مكان العمل.

دراسة (Biza, et.al., 2008) في اليونان والتي قدمت وصفاً لنموذج تفكير الطلبة، صور المفهوم، كذلك القدرة على المعالجة الرمزية حول المستقيم المماس لمنحنى، والتي تطورت من خلال خبرة الطلبة في مساقات الهندسة الإقليدية والتحليل، تم جمع البيانات من خلال استبانة قدمت لطلبة الصف الثاني عشر عددهم (196) طالباً، ومن خلال التحليل لصفى المستتر (Latent Class Analysis) تم تصنيف الطلبة إلى ثلاث مجموعات تراتبية (hierarchical groups)، تمثل الانتقال من النظرة الهندسية الشاملة (Geometrical Global perspective) للمستقيم المماس إلى النظرة التحليلية المحلية (Analytical Local perspective)، في ضوء هذا التصنيف، ومن خلال التفسير النوعي لاستجابات الطلبة، وصف الباحثين تفكير الطلبة عن مفهوم المماس في صيغة سبعة عوامل، وأقر الباحثين النموذج الذي شكلوه، وذلك من خلال تحليل العامل التأكيدي (Confirmatory Factor Analysis).

دراسة (Biza & Zachariades, 2010) والتي استهدفت (182) من طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات لمعرفة وجهة نظرهم حول مماس منحنى الدالة في ضوء دراسة سابقة لوجهة نظر طلبة الصف الثاني عشر (الثالث ثانوي)، كان الهدف استنتاج صورة التماس التي استقرت لديهم بعد ابتعادهم لعدة أشهر عن هذا المفهوم، وبعد دخولهم امتحان الجامعة الإلزامي، ومن ثم تم الربط بين أداء المتخرجين والطلبة على نفس أسئلة الاستبيان، وتم فرز الطلبة من خلال تحليل الصف المستتر (Latent Class) Analysis، وتم اختبار هذا التصنيف وفق التحليل المحلي (Analytical Local)، الهندسي الشامل (العالمي) (Geometrical Global)، والمحلي المتوسط (Intermediate Local) على موضوع التماس الذي تم تطبيقه على الطلبة، وقد اقترحت النتائج أن الخريجين وبشكل أفضل من الطلاب قد أبدوا وجهة نظر متوسطة (intermediate perspectives) عن التماس، أيضا استقرت لديهم الصور التي قدمت لهم بشكل متكرر وملح عن مفهوم التماس، وتجربتهم (خبرتهم) السابقة في هذا السياق عند التحضير لدخول الامتحان.

دراسة (Vincent, et, al., 2015) في أميركا والتي استكشفت فهم طلبة المستوى الأول لمفهوم المماس في مقرر التفاضل في الفصل الأول، وكيف يستخدم الطالب المستقيم المماس في سياق طريقة نيوتن (Newton's method)، تم القيام بالمقابلات التي اعتمدت على المهام مع (12) طالبا، حيث طلب منهم وصف المستقيم المماس شفويا، رسم المستقيمت المماس لعدة منحنيات، واستخدام المستقيمت المماس في سياق طريقة نيوتن، وتم اختبار التوضيحات البيانية للطلبة واللغة التي استخدمونها لوصف المستقيمت المماس، وتعيين ستة كلمات (مصطلحات) بارزة ومتكررة (prominent categories) تصف صور المفهوم (concept images) للمستقيم المماس لدى الطلبة، وأظهرت البيانات أن الطلبة غالبا ما يمررون عدة صور لمفهوم المماس، وغالبا ما تكون صور المفهوم (concept images) هذه متضاربة، علاوة على ذلك فإن الطلبة يرغبون في تعديل صور المفهوم الخاصة بهم عن المماس اعتمادا على المهمة التي تقدم لهم.

دراسة (Vincent, 2016) والتي هدفت لاختبار كيف يعرف طلبة المستوى الأول المستقيم المماس وكيف يفكرون به في مقرر التفاضل والتكامل في الفصل الدراسي الأول، واستنتاج أثر هذا النوع من التفكير في فهمهم للمشتقة، وتصورات الطلبة للمستقيم المماس تم استكشافها من خلال أربع مهام أولية: تعريف وإنشاء مستقيمت مماس، تمثيل المشتقة بيانيا، تفسير التعريف الصوري المجرد للمشتقة بيانيا، وصممت أول مهمتين للوصول لمعرفة الطلبة لمفهوم المستقيم المماس، والمهمتين التاليتين استمدت من قدرتهم لتطبيق المعرفة وربط المستقيم المماس بالمشتقة، في هذه الدراسة وصفت الباحثة استجابات الطلبة في صيغة توافق أو نقص في التوافق (overlap or lack of overlap) حول كيف أن المستقيم المماس والمشتقة يعرفان بشكل صوري، تم استخدام أطرا

مفاهيمية، وهي إطار المستقيم المماس (The Tangent Line Framework)، وإطار المشتقة (Derivative Framework) في هذه الدراسة لبناء هذه المعرفة، وقدمت الأطر طرقاً بيانية لتفسير فهم الطلبة، وإظهار الاختلاف بين مفهومي المشتقة والمماس بيانياً، وكشف تحليل النتائج الطرق التي يتصور بها الطلبة ارتباط المماس والمشتقة.

دراسة (Vincent & Sealey, 2016) التي هدفت إلى تقييم فهم الطلاب في التفاضل والتكامل في الفصل الأول، لمفهومي المستقيم المماس والمشتقة من خلال سلسلة من ثلاث مقابلات، وباستخدام مزيج من إطار لمفهوم المشتقة وإطار عن صورة المفهوم وتعريف المفهوم، وهدفت الدراسة أيضاً إلى تحليل الدور الذي تؤديه صورة مفهوم الطلاب للمستقيم المماس في فهمهم المفاهيمي لمفهوم المشتقات، وأشارت النتائج إلى أن الطلاب يكونون أكثر نجاحاً عند ما تتضمن صورة مفهوم المماس لديهم نقطة النهاية للمستقيمات القاطعة (the limiting position of secant line)، بدلاً من مفهوم المستقيم الذي يمس المنحنى في نقطة واحدة.

دراسة (السقاف، 2020) في اليمن والتي هدفت إلى تقييم المعرفة المفاهيمية لمعلمي رياضيات المرحلة الثانوية، ومن ثم بناء دليل مفاهيمي في ضوء هذا التقييم، تكونت عينة الدراسة من (18) مدرساً من مدرسي محافظتي عدن ولحج، واستخدمت ثمانية استبانات في كل فروع رياضيات التعليم الثانوي (المنطق الرياضي، الجبر، الهندسة، حساب المثلثات، مبدأ العد والاحتمالات، الإحصاء، التفاضل والتكامل) والتي تضمنت (259) فقرة، أظهرت النتائج صعوبات لدى المعلمين في كل الفروع، وفي فقرة تقييمية ترتبط بمفهوم المماس، أظهر المعلمين أخطاء مفاهيمية عديدة تتعلق بهذا المفهوم.

من خلال الاستعراض السابق نلاحظ أن الاهتمام بموضوع مفهوم المماس امتد لعقدين من الزمن تقريباً، كما أن الدراسات المتوفرة لم تكن كثيرة، وقد قدمت من قبل بعض الباحثين أنفسهم ممن أولوا هذا المفهوم الكثير من اهتمامهم، ولكن هذه الدراسات على قلتها فقد قدمت للباحثة إطاراً عاماً كافياً ومفيداً يخدم البحث، ومن الجدير بالذكر أنه لم يتوفر للباحثة أي دراسة عربية تتناول مفهوم المستقيم المماس بالبحث والتقييم، عدا دراسة واحدة للباحثة نفسها، وإن لم تكن هذه الدراسة موجهة لدراسة وتقصي المعرفة الخاصة بالمستقيم المماس إلا أنها كانت مؤشراً للباحثة، انطلقت منه الحاجة لإجراء هذا البحث.

ومن الجدير ملاحظته من خلال هذا الاستعراض تقارب معظم الدراسات السابقة مع البحث الحالي في أهدافها وهو كيف يعرف الطلبة مفهوم المستقيم المماس وما هي تصوراتهم حوله، وكشفت نتائج الدراسات كيفية تفكير الطلبة، ومن الملاحظ أيضاً توافق عينة هذا البحث مع معظم عينات الدراسات السابقة من حيث اختيارها المرحلة العمرية للطلبة، فكانت بين طلبة الصف الثالث

الثانوي وطلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات، فهي العينة الأنسب من حيث توقيت استيفاء تعلم الطلبة لمفهوم المماس، كما أن معظم الدراسات استخدمت المنهج الوصفي التحليلي لمناسبته لأغراض البحث، وتفاوتت أدوات البحث من كونها ملاحظة أو مقابلات أو استبانات، وتشابهت في كونها جميعا تحتوي على فقرات وأسئلة تتطلب استجابات رياضية ولفظية، واعتمدت أكثر الدراسات على التحليل النوعي للبيانات.

مشكلة البحث:

يعتبر مفهوم المماس من المفاهيم الرياضية المهمة والأساسية لبناء الفهم اللاحق لمفاهيم أخرى، خاصة في حساب التفاضل والتكامل كمعدل التغير والمشتقة، وقد لاحظت الباحثة من خلال تدريسها لمادة الرياضيات، ومن خلال تتبعها لهذا المفهوم في كتب رياضيات التعليم الأساسي والثانوي وجود قصور في تقديم مفهوم المستقيم المماس. وأيضاً من خلال دراسة قامت بها الباحثة لتقييم المعرفة المفاهيمية لمعلمي الرياضيات في المرحلة الثانوية (السقاف، 2020) وجدت ضعفاً في معرفة المعلمين لهذا المفهوم، وبعض الأخطاء المفاهيمية التي تتعلق به، وهذا كله قد ينعكس على معرفة الطلبة الذين أنهموا الثانوية العامة واختاروا التخصص في قسم الرياضيات، ولما قد يشكله هذا القصور من مشكلة تعيق تقدم تعلمهم، وانعكاساته السلبية على الواقع العملي عندما يتحول هؤلاء الطلبة إلى معلمين في الميدان. وقد لاحظت الباحثة أن الصعوبات في تعلم مفهوم المستقيم المماس ليست مشكلة محلية ولكنها مشكلة كثير من الطلبة في مرحلة تعلمهم للمفهوم وقد أظهرت دراسات من عدة دول كالإيونان وبريطانيا وأميركا هذه المشكلة وتم استعراضها في المقدمة والدراسات السابقة، وذلك يعود لطبيعة مفهوم المستقيم المماس نفسه، تتمثل هذه الصعوبات في شكل تصورات خاطئة حول المفهوم، ولهذا فإن تقييم وتحليل المعرفة المتعلقة بمفهوم المماس وتحديد مصادرها يساعد في تقديم صورة مناسبة قابلة للمعالجة والتغيير إن استدعى الأمر. وبما أن التغيير المفاهيمي كما أوضح (Alonso- Tapia, 2002) يتضمن تعديلات بسيطة أو جذرية على الفهم المفاهيمي (المعرفة المفاهيمية)، وهكذا تصبح كيفية تقييم الفهم المفاهيمي لدى الطلبة مسألة أساسية في التغيير المفاهيمي. ولهذا ارتأت الباحثة ضرورة إجراء هذا البحث لتقييم معرفة طلبة قسم الرياضيات في كلية التربية عدن لمفهوم المستقيم المماس وتحليل هذه المعرفة لوضع الحلول والمعالجات، وبما أن طلبة المستوى الأول يمرون بمرحلة انتقالية بين رياضيات التعليم الثانوي ورياضيات التعليم الجامعي فقد وقع اختيارها على هؤلاء الطلبة، وبما أنه بعد انتهاء الفصل الأول يكون الطلبة قد أدوا امتحاناتهم في مساق التفاضل والتكامل (1) والهندسة (1) وهي مساقات تتناول مفهوم المماس، في هذه المرحلة يكونوا قد اكتسبوا معرفة كاملة تقريبا بهذا المفهوم.

وعليه تحددت مشكلة البحث في السؤال الرئيس وهو:

ما معرفة طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس؟

ومنه تتفرع السؤالين التاليين:

- 1- ما مستوى معرفة طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس؟
- 2- ما صورة المفهوم التي يمتلكها طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس؟

أهداف البحث:

يهدف البحث إلى:

- 1- معرفة مستوى المعرفة التي يمتلكها طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس.
- 2- معرفة صورة المفهوم التي يمتلكها طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس.

أهمية البحث:

يكتسب البحث أهميته من أهمية عملية تقييم المعرفة وعلى وجه الخصوص المفاهيم التي تشكل اللبنة الأساسية في لبناء المعرفي، ومن خطورة تشكل الأخطاء المفاهيمية وتراكمها لدى الطلبة وتحولها إلى صور راسخة يصعب تغييرها، مما يؤثر على التعلم اللاحق، وفي الواقع أثناء التطبيق. ويكتسب البحث أهميته بشكل خاص من المفهوم الذي يتناوله، فمفهوم المماس مفهوم أساسي لتعلم مفاهيم لاحقة، وهذا البحث يقف على مستوى معرفة الطلبة لهذا المفهوم اللازم لبناء معرفة جديدة في مستويات دراسية متقدمة ومساقات مرتبطة لاحقة، ويقدم البحث أيضاً تحليلاً لهذه المعرفة، ويكشف صورة المفهوم التي تشكلت لدى الطلبة نتيجة مرورهم بخبرات سابقة قد يكون لها الأثر الأكبر في تعلم هذا المفهوم، واكتساب أخطاء مفاهيمية، فيحلل مصادر الخلل التي قد تؤثر في تشكل المفهوم، ويقدم توصيات قد تفيد في معالجة مصادر الخطأ، من ناحية أخرى قد يفتح البحث المجال لتناول مفاهيم أخرى بالبحث من ناحية الصورة المفاهيمية التي يمتلكها الطلبة وتتبع مراحل تشكلها.

تعريف مصطلحات البحث:

المفهوم: "المفهوم تكوين عقلي ينشأ عن تجريد خاصية (أو أكثر) من مواقف متعددة يتوفر في كل منها هذه الخاصية حيث تعزل هذه الخاصية مما يحيط بها في أي من المواقف المعينة وتعطى اسماً يعبر عنه بلفظ أو رمز" (عبيد وآخرون، 2000، ص95).

"المفهوم هو الصورة الذهنية التي تتكون لدى الفرد نتيجة تعميم صفات وخصائص استنتجت من أشياء متشابهة هي أمثلة ذلك المفهوم" (أبو زينة، 2007، ص118).

"المفهوم هو السمة المميزة أو الصفة التي توفر في جميع الأمثلة الدالة على ذلك المفهوم" (عفانة وآخرون، 2010، ص89).

"المفهوم فكرة مجردة تمكن التلميذ من تصنيف الأشياء والأحداث وتحديد ما إذا كانت تلك الأشياء أو الأحداث هي أمثلة أو لا أمثلة للفكرة المجردة، والمفهوم الرياضي يعني تجريد لمجموعة من الصفات المشتركة بين مجموعة من حالات أو أمثلة هذا المفهوم" (بدوي، 2003، ص62).

"المفهوم الرياضي هو فكرة رياضية معقدة تنشأ نتيجة تجريد صفة أو أكثر، ويعبر عنها لفظياً أو رمزياً، بحيث يستطيع المتعلم تمثيل المفهوم بأكثر من طريقة بحسب فهمه للفكرة" (أبو هلال، 2012، ص37).

وتعرفه الباحثة إجرانيا بأنه الصورة الذهنية التي يمتلكها طلبة المستوى الأول من قسم الرياضيات في كليات التربية جامعة عدن، لمجموعة من الخصائص المشتركة ومجموعة الأمثلة واللامثلة، ويعبرون عنها ببيانها أو رمزياً أو لفظياً بلغتهم الخاصة.

حدود البحث:

يقصر هذا البحث على:

- طلبة المستوى الأول في قسم الرياضيات بكلية التربية عدن الفصل الثاني للعام الدراسي 2022-2021.
- مفهوم المستقيم المماس.

منهج البحث:

اعتمد هذا البحث على المنهج الوصفي التحليلي الكيفي لملائمته لأهداف البحث.

مجتمع البحث:

تكون مجتمع البحث من جميع طلبة المستوى الأول قسم الرياضيات في كليات التربية، جامعة عدن، والجدول التالي يوضح توزيع مجتمع البحث في كل كلية:

جدول رقم (1)

الكلية						المستوى
طور الباحة	الضالع	يافع	ردفان	صبر	عدن	
15	3	7	5	13	11	الأول

عينة البحث:

تكونت عينة البحث من طلبة المستوى الأول في قسم الرياضيات وعددهم (11)، وقد شكلت عينة البحث نسبة 20% تقريبا من مجتمع البحث وهي النسبة المقبولة في البحوث الوصفية.

إجراءات البحث:

1- قامت الباحثة بتتبع مفهوم المماس في المناهج الدراسية في كتب التعليم الأساسي والثانوي ومساقات التعليم الجامعي، وكانت النتائج كما يلي:

مفهوم المماس في كتب الرياضيات للتعليم العام في الجمهورية اليمنية:

ظهر مفهوم المماس للمرة الأولى في كتاب الصف التاسع في الدرس الثامن من الوحدة الخامسة وحدة (الدائرة) في درس مستقل يحمل عنوان (المماس) في صفحة (43)، وقد تم تقديم المفهوم وفقا للحالة الثالثة للأوضاع النسبية بين مستقيم ودائرة والتي تعني بوجود نقطة واحدة مشتركة بين المستقيم والدائرة، حيث يسمى هذا المستقيم مماسا للدائرة، والنقطة المشتركة بنقطة التماس. وفي صفحة (44) تم تعريف المماس على أنه: "المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة من نقطة نهايته على الدائرة يكون مماسا للدائرة عند تلك النقطة". واشتمل الدرس على عدة مبرهنات ونتائج منها مبرهنة (5-10) والتي تنص على أن: "مماس الدائرة يكون عمودي على نصف القطر المار بنقطة التماس"، ومن نتائجها، نتيجة (1) في صفحة (45)، والتي تنص على أنه: "لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة من نقطة عليها"، ونتيجة (2): "العمود المقام على مماس دائرة من نقطة التماس يمر بمركزها" ص(46)، وفي الصفحة نفسها قدم مثال أول في الدرس كتطبيق للمبرهنة ونتائجها، ثم المبرهنة (5-11): "المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان" ص(47)، ونتائجها، نتيجة (1): "المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة يقابلان زاويتين مركزيين متطابقتين"، نتيجة (2): "القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز دائرة ونقطة خارجها تنصف الزاوية التي ضلعاها مماسا للدائرة من تلك النقطة" ص(48)، وتم تقديم المثال رقم (2) كتطبيق للمبرهنات والنتائج ص(48)، مبرهنة (5-12): "قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى"، ص(49)، نتيجة (3): "إذا رسم مستقيم من إحدى نهايتي وتر في دائرة يصنع معه زاوية تساوي بالقياس الزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الأخرى كان ذلك المستقيم مماسا للدائرة" ص(50)، ثم في لصفحة نفسها قدم المثال (3) كتطبيق للمبرهنة ونتائجها، اتبع الدرس بتمارين ومسائل تتعلق بمفهوم الدرس عددها عرة وامتدت في صفتين (51،52)، (كتاب الرياضيات للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي، الجزء الثاني، 2010).

مفهوم المماس في كتب الرياضيات للتعليم الثانوي في الجمهورية اليمنية:

أما في رياضيات التعليم الثانوي فقد ظهر مصطلح المماس أول مرة في وحدة حساب التفاضل ومن ثم ظهر في وحدات الهندسة التحليلية، حيث ظهر مصطلح المماس في الصف الثاني ثانوي، في القسمين العلمي والأدبي.

بالنسبة للقسم العلمي فقد ظهر للمرة الأولى في الوحدة الخامسة من كتاب الصف الثاني ثانوي الجزء الأول (الرياضيات للصف الثاني ثانوي "القسم العلمي" الجزء الأول، 2018)، في وحدة النهايات والاتصال والاشتقاق، في الدرس الثالث (5-3) درس معدل تغير الدالة، بشكل فجائي ودون مقدمات، وذلك في مثال رقم (22-5) وذلك في صفحة (142)، وذلك عندما طلب في الفرع (د) من المثال إيجاد ميل المماس لمنحنى دالة، عند نقطة معينة $s=2$ ، رافق المثال وجود رسم بياني للدالة المعطاة مع رسم للمستقيم الذي يمسه عند النقطة $s=2$ شكل (13-5) ولكن دون إشارة إلى أنه مستقيم مماس، وفي بداية حل الفرع ظهرت هذه العبارة:

"بما أن ميل المماس هو ميل الخط المستقيم في نقطة مماسة مع الدالة، يتحقق عندما يقترب معدل التغير الأفقي من الصفر، فإن" ص(143)، متبوعة بخطوات رياضية لحساب ميل المماس عند النقطة المعطاة.

في الدرس الرابع (5-4) درس المشتقة، ظهر ضمن التفسير الهندسي للمشتقة في صفحتي (147،148)، أيضا جاء في السياق دون تعريف أو توضيح، فقط ذكر ميل مستقيم المماس ومن ثم في نهاية الفقرة تم استنتاج معادلته.

ثم تتابع ظهور مفهوم ميل المماس ومعادلة المماس كمطالب في الأمثلة (27-5)، (28-5)، (29-5) وتدريب (2-5) والتمارين (1,7,8,9,10,11,12,13) الخاصة بالدرس، علما بأن مثالا تضمن رسما للمماسات في سياق الحل مع توضيح لأوضاعها.

ثم ظهر بشكل غير مباشر في الوحدة السابعة من كتاب (الرياضيات للصف الثاني ثانوي "القسم العلمي" الجزء الثاني، 2015) وهي وحدة الهندسة الإحداثية، في الدرس الأول (1-7) درس "معادلة الدائرة"، حيث ظهر تعبير "مستقيم يمس الدائرة" في مثال رقم (7-7) ص(53)، والمرفق بشكل بياني رقم (8-7)، والذي يوضح مستقيم يمس دائرة في نقطة، ثم ظهر في تمارين رقم (3,4,5,6) الخاصة بالدرس، ثم ظهر التعبير نفسه في مقدمة الدرس الثاني من الوحدة (2-7) وهو درس بعنوان "الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة" مرفق بشكل بياني رقمه (9-7) (ب) في صفحة (55)، وفي حل مثال (8-7) في ص(55، 56) مع رسم بياني رقمه (10-7).

ثم ظهر مصطلح المماس بشكل مباشر في الدرس الثالث (3-7) الذي عنوانه "معادلة المماس لدائرة" في صفحة (58)، وجاء في أول جملة في مقدمة الدرس ما يلي: "تأمل شكل (11-7) وتذكر أن: مماس الدائرة يكون عموديا على نصف القطر المار بنقطة التماس"، وقد قدم الدرس معادلة المماس في عدة حالات، وتكرر ظهور مفهوم معادلة مماس الدائرة خلال الدرس وتمارينه.

كما ظهر في الدرس الرابع (4-7) الذي عنوانه "طول المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها" في صفحة (63)، وقد قدم الدرس قانونا لحساب طول المماس لدائرة من نقطة خارجها، وتكرر مفهوم طول المماس خلال الدرس وتمارينه.

في كتاب الصف الثالث ثانوي علمي (الرياضيات للصف الثالث ثانوي "القسم العلمي"، 2011) ظهر مفهوم المماس مرة أخرى في الوحدة السادسة، وحدة "التفاضل" في درس مشتقة الدالة الضمنية الدرس الرابع (4-6)، كتذكير بمعادلته في ملاحظة في صفحة (168)، تبع ذلك أمثلة (15-6)، (16-6) توظف مشتقة دالة عند نقطة كمرادف لمفهوم ميل المماس عند نقطة، الشيء نفسه في درس "مشتقة الدوال المثلثية" رقم (6-6) عندما ظهر في سياق إيجاد معادلته في مثالي (23-6) ص(176)، (26-6) ص(178)، وتمارين (2) في صفحة (181).

ثم ظهر في درس "مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة" رقم (7-6) في كل من التفسيرات الهندسية لهذه النظريات، كعلاقة بين ميل المماس عند نقطة وميل القاطع المار بين نقطتين في ص(183)، (186) مع رسوم توضيحية، كما ظهر في درس "القيم القصوى" رقم (8-6) في موضوع فترات التقعر ونقاط الانعطاف في صفحة (196)، حيث تم التوضيح بالرسم والشرح لموضع مماسات لمنحنى في حالتي التقعر لأعلى وأسفل، مع العلم أنها المرة الأولى في سلسلة هذه الكتب الذي يظهر مفهوم مماس المنحنى بشكل مستقل عن مفهوم الميل أو المعادلة الرياضية، وإن لم يظهر بصيغة مباشرة في صيغة "مماس منحنى".

كما ظهر مفهوم ميل المماس في وحدة "التكامل" وهي الوحدة السابعة في درس "التكامل غير المحدد" في مثال رقم (10-7) في صفحة (225) كمعطى لإيجاد معادلة لمنحنى، والشيء نفسه في تمارين الدرس رقم (43,45,46).

من المهم ذكره أن مفهوم المماس لم يظهر أبدا في وحدة القطوع المخروطية وهي الوحدة الرابعة من كتاب الصف الثالث ثانوي القسم العلمي.

من خلال تتبع مفهوم المماس في كتب الرياضيات نلاحظ أن مفهوم المماس قدم بشكل منطقي أولا كمفهوم في الهندسة الإقليدية (مماس الدائرة) في التعليم الأساسي، واستمر هذا التوسع في مفهوم مماس الدائرة حتى التعليم الثانوي، ولكن الانتقال والتوسع إلى مفهوم مماس القطوع المخروطية غاب كليا، أما تقديمه في وحدات التفاضل كمماس لمنحنى فقد كان ارتجاليا وبشكل باهت فلم يركز على تقديم أي تعريف أو خواص أو أمثلة ولا أمثلة له، كما كان تقديم المفهوم في التعليم الثانوي عشوائيا، حيث قدم في وحدة التفاضل قبل وحدة الهندسة، وهذه العشوائية تسبب بالتالي إرباكا للطلبة، خاصة مع القصور الواضح في عملية ربط المفهوم وتوسيعه وتعميمه، كما تم القفز إلى فكرة ميل المستقيم المماس للمنحنى ومعادلته قبل التطرق لتعريفه.

مفهوم المماس في التعليم الجامعي:

في الفصل الدراسي الأول من السنة الأولى يتعلم الطلبة في قسم الرياضيات مساق التفاضل والتكامل (1) (ر 111)، ومساق الهندسة (1) (ر 121)، وفي المساق الأول يدرس الطلبة مفهوم المماس كواحدة من مفردات المساق، وفي مساق الهندسة يدرس الطلبة الدائرة وعلاقتها بالمستقيم كما يدرسون القطوع المخروطية (خطوط مساقات برنامج بكالوريوس الرياضيات، كلية التربية عدن).

2- إعداد أداة البحث:

من الناحية المفاهيمية يعد الدور الذي يؤديه التفكير البصري أساسيا في فهم حساب التفاضل والتكامل، والذي يعتبر من الصعب تخيل نجاحا في مساق التفاضل والتكامل لا يؤكد على العناصر البصرية في الموضوع (Zimmerman, 1991)، والتصوير البصري في الرياضيات يرتبط بشكل مباشر بمفهوم الصورة الذهنية، وهو بمعنى التمثيل الذهني للمفهوم الرياضي أو الشيء الرياضي، أيضا التصوير هو تطبيق للصورة المفاهيمية للمسائل الرياضية لتكوين صور ذهنية، كما أن أساس الاستدلال الرياضي هو اللغة الرياضية التي تتضمن المصطلحات، الترميز، التعاريف، القوانين المنطقية وبناء الجملة الرياضية (syntax)، واللغة الرياضية تتطلب الاستخدام الفعال لهذه المكونات لتبرير وتمثيل وفهم وتوصيل ومشاركة المفاهيم والعلاقات والمعلومات (Stavropoulos & Toultsinaki, 2010).

بناء على ما سبق اعتمدت الباحثة لقياس المعرفة الخاصة بمفهوم المماس على مقياس صمم لهذا الغرض من قبل (Biza, et.al., 2008) وتم استخدامه في دراستهم، ومن ثم تم استخدامه أيضا في دراسة (Stavropoulos & Toultsinaki, 2010)، والذي يتكون من ثمانية أسئلة بعضها متفرعة، وهي كما يلي:

الأسئلة (3,4,5) تهتم بالتمثيل البصري لمفهوم المماس لدى الطلبة، السؤال الثالث يطلب من الطلبة تحديد أي من المستقيمات المعطاة تمثل مماسات مع تبرير الإجابة، ويعتبر هذا السؤال سؤالا تصنيفيا، بينما السؤالين الرابع والخامس يتطلبان من الطلبة إنشاء مماسات، ويعتبر السؤال الخامس أكثر تحديا من السؤال الرابع وذلك لوجود ثلاثة حلول.

الأسئلة (1,2,6) تتطلب شروحات مكتوبة لفهم الطلبة لمفهوم المماس، هذه الأسئلة لا تتطلب إجابات بلغة ومصطلحات رياضية، أي تطلب إجابات عفوية تصح عن الصورة المفاهيمية التي يحملها الطلبة، بينما السؤال رقم (7) يتطلب لغة ومصطلحات رياضية لأنه يشير للتمثيل الرمزي للمماس، وأخيرا السؤال رقم (8) فهو يتطلب معرفة رمزية وإجرائية واستخداما للرموز الرياضية.

3- وضع معايير تصحيح الفقرات: وضعت الباحثة بعض المعايير والشروط لتوزيع درجات الأسئلة كما يلي:

السؤال الأول: درجتان لإجابة تعطي صورة صحيحة ومقبولة، درجة واحدة في حالة إجابة تحتوي على صورة مقبولة مع وجود التباس مع مفاهيم أخرى.

السؤال الثاني: ثلاث درجات في حالة تقديم ثلاث خواص أو أكثر، درجتان في حالة تقديم خاصيتين، درجة واحدة في حالة تقديم خاصية وحدة.

السؤال الثالث: درجتان للتصنيف الصحيح لكل فرع مع تقديم السبب الصحيح، درجة في حالة التصنيف الصحيح فقط.

السؤال الرابع: درجة لكل استجابة صحيحة لكل فرع.

السؤال الخامس: ثلاث درجات في حالة رسم ثلاثة مماسات، درجتان في حالة رسم مماسين، درجة واحدة في حالة رسم مماس واحد.

السؤال السادس: درجتان في حالة إجابة صحيحة منطقية، درجة في حالة إجابة منطقية صحيحة جزئياً.

وبالنسبة للسؤالين السابع والثامن فتحدد درجة للسؤال السابع، ودرجتان للسؤال الثامن توزع على خطوات الحل، بالتالي تكون الدرجة الكلية للأسئلة ثلاثون درجة.

4- تطبيق أداة البحث على عينة استطلاعية:

تم تطبيق أداة البحث على عينة استطلاعية من طلبة المستوى الأول من قسم الرياضيات كلية التربية صبر في الفصل الدراسي الثاني الموافق 31 مايو 2022 وكان متوسط الزمن للإجابة على أداة البحث (45) دقيقة، وقد شكلت العينة الاستطلاعية ما نسبته 25% تقريبا من مجتمع البحث.

5- صدق وثبات أداة البحث:

رغم أن المقياس يعتبر محكما وموثوقا، ولكن تم عرضه على مجموعة من المحكمين من ذوي الخبرة والاختصاص في طرق تدريس الرياضيات والرياضيات البحتة، وذلك للتحقق من ملائمتها لمستوى الطلبة وبيئتهم، وكانت الآراء متفقة حول مناسبتها ووضوحه، كما تم تطبيقه على العينة الاستطلاعية وتم حساب الثبات باستخدام معامل ألفا كرومباخ لقياس الاتساق الداخلي للفقرات، وقد كانت قيمته المحسوبة (0.76) وهو معامل جيد، حيث أن المدى المناسب يقع بين (0.7-0.9).

6- تطبيق أداة البحث:

تم تطبيق أداة البحث على عينة الدراسة من طلبة المستوى الأول من قسم الرياضيات كلية التربية عدن في الفصل الدراسي الثاني الموافق 5 يونيو 2022.

النتائج:

للإجابة عن سؤال البحث الأول (تحديد مستوى معرفة الطلبة لمفهوم المستقيم المماس) تم التحليل الكمي للبيانات وكانت النتائج كالآتي:

أولاً: حساب المتوسطات الحسابية لاستجابات الطلبة والانحرافات المعيارية عن هذه المتوسطات يظهر الجدول التالي المتوسطات الحسابية، الانحرافات المعيارية والنسب المئوية:

جدول رقم (2): المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية

السؤال	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	الاجمالي
الدرجة الكلية	2	3	10	7	3	2	1	2	30
المتوسط	1	.18	3.55	1.3	.36	.73	.18	.00	7.18
الانحراف المعياري	.77	.42	1.37	.65	.67	.47	.41	.00	2.96
النسبة المئوية	50%	6%	36%	19%	12%	37%	18%	0%	24%

الجدول السابق يظهر أن المتوسط الحسابي للدرجات الكلية للطلبة ضعيف جداً ويشكل تقريباً أربعة وعشرون بالمائة من الدرجة الكلية.

كذلك المتوسطات الحسابية لجميع الدرجات تعتبر متوسطات ضعيفة، وجميعها تقع دون الخمسين بالمائة، عدا المتوسط الحسابي لدرجات السؤال الأول وفي هذه الحالة تكون في المستوى المقبول.

بينما درجات السؤال الثامن كانت متطابقة وجميعها صفرية، ويظهر من استجابات الطلبة للسؤال السابع أن طالبين فقط تمكنا من كتابة المعادلة بشكل صحيح، وحتى هذين الطالبين لم يتمكننا من استخدام الصورة العامة لمعادلة المماس في إيجاد هذه المعادلة عند نقطة معلومة.

ثانياً: تم استخدام اختبار **One Sample T-Test** في ضوء المتوسط الفرضي (15) والجدول الآتي يلخص ذلك:

جدول رقم (3)

One-Sample Test						
Test Value = 15						
	T	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
total	-8.759-	10	.000	-7.81818-	-9.8070-	-5.8294-

من الجدول أعلاه يتضح أن قيمة (T) بلغت (8.759) وهي دالة إحصائياً عند مستوى دلالة ($\alpha = 0.01$) وهذا مؤشر على أن هناك ضعفاً شديداً لدى طلبة المستوى الأول من قسم الرياضيات في معرفتهم بمفهوم المستقيم المماس.

للإجابة عن سؤال البحث الثاني (صورة المفهوم) تم التحليل النوعي (الكيفي) لاستجابات الطلبة. نتائج السؤال الأول: يتضح من استجابات الطلبة أن الصورة المفاهيمية لمفهوم المماس، هي صورة مشوشة، حيث أن ثلاثة طلاب أظهروا امتلاكهم صورة مقبولة لمفهوم المماس (وهي أنه مستقيم يمس المنحنى في نقطة ما)، وهؤلاء الطلبة استخدموا مصطلح المنحنى في تعبيرهم عن مفهوم المماس، بينما أظهر خمسة طلاب تداخلا بين مفهوم المماس ومفاهيم أخرى، فبالإضافة لتعبيرهم عن مفهوم المماس اعتبره بعضهم مرادفاً لمفهوم الميل أو المشتقة، كما أظهروا بعض الأخطاء المفاهيمية الأخرى مثل أن يكون عمودياً على المنحنى، أو أن يسمح بأن يقطع الدائرة في أكثر من نقطة، كما تم ملاحظة أن بعض هؤلاء الطلبة استخدم مصطلح الدائرة في التعبير عن مفهومهم للمستقيم المماس. أما باقي الطلبة قدموا استجابات عشوائية بعيدة عن مفهوم التماس، وما يمكن تلخيصه كنتيجة لهذا السؤال أن صورة مفهوم المماس ترتبط لدى الطلاب بمفهوم المنحنى ومفهوم الدائرة على حد سواء، وأن بعض الطلبة يعتقدون أن الشروط التي تنطبق على مفهوم التماس هي نفسها في حالة الدائرة أو المنحنى، بمعنى أن الطلبة الذين يعتقدون بأن المستقيم المماس يمكن أن يشترك مع المنحنى ككل في أكثر من نقطة يرون إمكانية تحقق ذلك في حالة الدائرة، والذين يعتقدون أن المستقيم المماس لا يمكن أن يشترك مع الدائرة في أكثر من نقطة، يعممون هذا الشرط في حالة المنحنى أيضاً.

نتائج السؤال الثاني: تراوحت استجابات الطلبة ما بين عدم الاستجابة إلى إجابات لا تناسب المطلوب، طالبين اثنين فقط قدما خاصية واحدة وهي وجود نقطة مشتركة بين المنحنى والمستقيم الذي يمس.

نتائج السؤال الثالث: في هذا السؤال أظهرت استجابات الطلبة الأخطاء المفاهيمية التالية: أولاً أن المستقيم المماس لا يمكن أن يشترك مع المنحنى ككل في أكثر من نقطة، الخطأ الثاني هو إمكانية وجود مستقيم مماس عند الرؤوس الحادة، ثالثاً إمكانية وجود أكثر من مستقيم مماس عند النقطة نفسها، كما أظهرت الاستجابات أن بعض الطلبة لم يقدموا تبريرات لسبب تصنيفهم لنوع المستقيمت.

نتائج السؤال الرابع والخامس: يكشف هذين السؤالين المشكلة الأكبر في معرفة الطلبة لمفهوم المماس حيث لم يراع جميع الطلبة الاتجاه لذي يجب أن يرسم عليه المماس وهو اتجاه سير المنحنى عند النقطة المعطاة، فجاءت الاستجابات عشوائية لا تعبر عن نمط تفكير معين أو صورة مفاهيمية صحيحة وواضحة- رغم صحة بعض الرسوم والتي جاءت على ما يبدو من قبيل المصادفة- حيث أظهرت الاستجابات تناقضاً بين ما قدموه من صور للمفهوم في السؤال الأول أو

تصنيفهم وتبريرهم في السؤال الثالث، حيث ظهرت المستقيمات التي تم رسمها بصورة مستقيمت مارة بالمنحنى في نقطة واحدة في معظم الحالات أو كمستقيم قاطع، حتى في حالة القطوع المخروطية والخط المستقيم ظهرت المستقيمات المماسة كقواطع في حالات كثيرة، كذلك في السؤال الخامس كانت الرسوم الممثلة للمماس عبارة عن خطوط عشوائية لا تعبر عن أي فهم لفكرة التماس. نتائج السؤال السادس: لم تختلف استجابة الطلبة لهذا السؤال عن ما ذكره في استجاباتهم للسؤال الأول، غير أن أحد الطلاب الذين قدموا استجابات مقبولة أضاف الخطأ ذاته الذي أظهره زملاءه وهو أن مفهوم المستقيم المماس هو مفهوم مرادف للميل والمشتقة وظل الزاوية.

نتائج السؤال السابع والثامن: كما سبق التوضيح أن طالبين فقط تمكنا من كتابة المعادلة بشكل صحيح، وهذا يظهر عدم قدرة الطلبة على تذكر معادلة المماس، أي عدم قرنتهم على الاحتفاظ بالتعلم، رغم أن الفاصل الزمني بين تعلم المفهوم في الفصل الأول وتطبيق الاختبار في الفصل الثاني عدة أسابيع فقط، كما أظهرت النتائج أنه حتى هذين الطالبين لم يتمكنوا من استخدام الصورة العامة لمعادلة المماس في إيجاد هذه المعادلة عند نقطة معلومة، مما يعني ضعفا في القدرة على المعالجة والتمثيل الرمزي أي المعرفة الإجرائية لدى الطلبة، وقد وجاءت هذه الاستجابات نتيجة حتمية لما ظهر في السؤال السابع من استجابات.

وهنا يمكننا أن نلخص أنه على الرغم من تعرض الطلبة لمفهوم المستقيم المماس لسنوات دراسية طويلة إلا أن معرفة طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات لمفهوم المماس معرفة ضعيفة من الناحية المفاهيمية ومن ناحية التمثيل البصري والرمزي والمعرفة الإجرائية، كما أن صورة مفهوم المستقيم المماس لديهم صورة متناقضة وغير صحيحة وغير واضحة وغير مكتملة، وبالتالي يحتاج الطلبة لتعديل تلك الصورة وإجراء تغيير مفاهيمي لإعادة بناء معرفتهم لهذا المفهوم المهم والأساسي. وفيما يخص مقارنة نتائج هذا البحث مع ما جاء في الإطار النظري ونتائج الدراسات السابقة يتضح أن سبب الأخطاء المفاهيمية والقصور المعرفي لدى الطلبة فيما يخص مفهوم المماس يعود لتأثير الخبرة السابقة، فيما يتعلق بما تعلموه في هندسة إقليدس حيث انعكس سلبا على مفهوم المماس الأعم (التعريف الصوري الرسمي) ضمن مجال حساب التفاضل والتكامل، ولكن هذا التأثير ربما لا يكون هو المشكلة الوحيدة، فالمشكلة الأكبر في عدم امتلاك الطلبة لأي معرفة صحيحة وواضحة ومحددة لمفهوم المستقيم المماس، حيث يتضح من خلال استجاباتهم هذا الضعف حتى في إطار خبرتهم بالمفهوم وفق هندسة إقليدس.

وفيما يخص صورة المفهوم لدى الطلبة والأخطاء المفاهيمية المتعلقة بمعرفتهم بهذا المفهوم يمكن أن نلخص الآتي:

- يمتلك بعض الطلبة صورة للمستقيم المماس تتطابق مع صورة مفهوم المماس للدائرة والتي تقتصر على وجوب وجود نقطة واحدة مشتركة بين المنحنى والمستقيم المماس وهي صورة ناقصة تعبر عن خطأ مفاهيمي، بينما يمتلك بعض الطلبة صورة للمستقيم المماس تتطابق مع صورة مفهوم المماس للمنحنى، وهنا يسقط إمكانية وجود أكثر من نقطة مشتركة بين الدائرة والمستقيم المماس وهي صورة خاطئة أيضاً، ولكن في كلا الحالتين لا يحتفظ الطلبة بأي من الصورتين بشكل مكتمل فيعودون ويناقضوا معتقداتهم، وبهذا يمكننا أن نستنتج أن الطلبة لا يملكون صورة مفاهيمية صحيحة وواضحة.

- يعتقد الطلبة بإمكانية وجود مستقيمتان مماسة عند الرؤوس المدببة.
 - يتصور الطلبة إمكانية وجود أكثر من مستقيم مماس للمنحنى عن نفس النقطة الواقعة عليه.
 - يتصور الطلبة أن المستقيم المماس يمكن أن يكون في أي اتجاه بالنسبة للمنحنى عند نقطة معينة، أي أنهم لا يمتلكون أدنى فكرة عن أن المستقيم المماس عند نقطة يعبر عن اتجاه سير المنحنى عند تلك النقطة.
 - يمتلك بعض الطلبة تصور خاطئ بأن مفهوم المستقيم المماس مفهوماً مرادفاً لمفاهيم الميل والظل والمشتقة.

- يعتقد بعض الطلبة أن المستقيم المماس يجب أن يكون عمودياً على المنحنى.

مناقشة وتفسير النتائج:

يمكن تفسير النتائج السابقة والتي تلخصت بوجود ضعف في معرفة طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات لمفهوم المماس وعزوها إلى عدة أسباب منها:

أولاً: ما أوضحناه سابقاً من تتبع السياق التاريخي لظهور مفهوم المماس في خبرة الطلبة مع هذا المفهوم في الكتب المدرسية، فكما تبين سابقاً أن المفهوم قدم بطريقة سطحية شملها الغموض والارتباك، حيث أن المفهوم لم يأخذ حقه في التقديم والتعريف ولا في التسلسل المنطقي والتمثيل البصري، فقط تركز الاهتمام نوعاً ما على الصورة الأولية للمفهوم وهي صورة مماس الدائرة والمعالجة الرمزية والإجرائية للمستقيم المماس في حالة الدائرة وكذلك المنحنى، والتي رغم ذلك كانت نتائجها الأسوأ بين النتائج وقد يعود ذلك إلى صحة النظرية التي تؤكد أن المعرفة مع الفهم يجب أن تسبق أي معالجة رمزية وإجرائية حتى تبنى المعرفة بشكل صحيح.

ثانياً: قد يعود ضعف معرفة الطلبة بالمستقيم المماس وتناقض الصور المفاهيمية له لكون تعريف المفهوم الشامل للمستقيم المماس لم يقدم بشكل واضح ومباشر وتم التركيز على التعريفات المختصرة له، بالإضافة إلى ضعف في قدرتهم على فهم العلاقة بين المستقيم المماس كل وعلاقته بالمنحنى عند نقطة معينة.

ثالثا: من خلال تتبع التاريخ الدراسي لطلبة السنة الأولى يتضح وجود فجوات في تعليم هؤلاء الطلبة منها اضراب معلمي التعليم العام في عام 2018-2019 والتي توافق كون هؤلاء الطلبة في الصف الثاني ثانوي، واستمر هذا الاضراب حوالي شهرين، وعندما كان هؤلاء الطلبة في الصف الثالث ثانوي اجتاحت جائحة كورونا العالم ومنها بلادنا في العام الدراسي 2019-2020 وتسببت هذه الجائحة بتعطيل سير الدراسة لعدة أشهر وترفع هذه الدفعة دون امتحان نهائي في الثانوية العامة. وفي الفصل الدراسي الأول من هذا العام الدراسي 2021-2022 والذي توقفت فيه الدراسة بسبب اضراب الهيئة التعليمية في جامعة عدن والذي يصادف كون الطلبة في فصلهم الأول من السنة الأولى في دراستهم الجامعية، كل هذه الفجوات في مسيرة تعليم هؤلاء الطلبة لابد وأن تكون قد أثرت على تعليمهم وتعلمهم لكثير من المفاهيم في شتى المجالات من حيث الاختصار والتخطي والسطحية.

رابعا: ضعف مستوى الطلبة والذي أظهرته استجاباتهم العشوائية والمتناقضة والتي لا تستند إلى منطق معين يمكن في ضوئه تتبع الصورة الذهنية التي يملكونها.

خامسا: قد يعزى هذا الضعف لدى الطلبة إلى الضعف الذي أظهرته دراسة (السقاف، 2020) لدى معلمي الرياضيات في المرحلة الثانوية فيما يخص مفهوم المماس وإلى الأخطاء المفاهيمية التي يمتلكها المعلمين أنفسهم.

الاستنتاجات:

توصل البحث إلى ما يلي:

- ضعف في مستوى معرفة طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات لمفهوم المستقيم المماس.
- امتلاك طلبة السنة الأولى من قسم الرياضيات صورة متناقضة وخطئة ومشوشة وغير مكتملة لمفهوم المستقيم المماس.

التوصيات:

يوصي البحث بما يلي:

- التركيز على تقديم التعريف الشامل للمستقيم المماس في التعليم الثانوي والجامعي وتجنب التعريفات المختصرة لهذا المفهوم.
- إدخال تعديلات على المحتوى الذي يتعلق بالمماس في كتب الثانوية العامة عند عملية تطوير المناهج بحيث يشمل التعديل الوضح والمنطقي والكافي والعميق لهذا المفهوم، مع التركيز على التمثيل البصري، وتوسعة المفهوم بشكل صحيح.
- رأب الفجوة المعرفية المتعلقة بمفهوم المماس لدى طلبة المستوى الأول لتغطية المفهوم من خلال أنشطة وفعاليات تدريسية إضافية.

- التركيز على مفهوم المماس من قبل المعلمين في التعليم الثانوي والجامعي وتقديم أكبر عدد من الخصائص والحالات التي تعبر عن مفهوم المماس والتركيز على التحركات والاستراتيجيات المناسبة لتدريس المفاهيم الرياضية ومنها المستقيم المماس والتي تتضمن تقديم التعريف والأمثلة واللامثلة والشرط اللازم والكافي وغيرها من التحركات التدريسية.

المقترحات:

تقترح الباحثة:

- إجراء أبحاث تقوم على توظيف البرامج الحاسوبية التفاعلية التي تعتمد على التمثيل البصري لتدريس مفهوم المماس، والتي تساعد في توضيح العلاقة بين المستقيم المماس والمنحنى.
- إجراء أبحاث مماثلة تتناول تقييم معرفة الطلبة لمفاهيم رياضية أخرى، ولمستويات دراسية مختلفة.

المراجع:

- أبو زينة، فريد كامل (2007). تطوير مناهج الرياضيات المدرسية وتدريسها. الطبعة الأولى، مكتبة الفلاح، الإمارات.
- أبو هلال، محمد (2012). أثر استخدام التمثيلات الرياضية على اكتساب المفاهيم والميل نحو الرياضيات لدى طلاب الصف السادس الأساسي (رسالة ماجستير غير منشورة). الجامعة الإسلامية، غزة.
- بدوي، رمضان مسعد (2003). استراتيجيات في تعليم وتقويم تعلم الرياضيات. ط1. دار الفكر، الأردن.
- خطط مساقات برنامج بكالوريوس الرياضيات، قسم الرياضيات، كلية التربية عدن، جامعة عدن، (ب. ت).
- الرياضيات للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي، الجزء الثاني (2010).
- الرياضيات للصف الثالث ثانوي القسم العلمي (2011). الجمهورية اليمنية وزارة التربية والتعليم، قطاع المناهج والتوجيه، الإدارة العامة للمناهج، الطبعة الثانية.
- الرياضيات للصف الثاني ثانوي القسم العلمي، الجزء الأول (2018). الجمهورية اليمنية وزارة التربية والتعليم، قطاع المناهج والتوجيه، الإدارة العامة للمناهج.
- الرياضيات للصف الثاني ثانوي القسم العلمي، الجزء الثاني (2015). الجمهورية اليمنية وزارة التربية والتعليم، قطاع المناهج والتوجيه، الإدارة العامة للمناهج.
- الشربيني، زكريا؛ وصادق، يسرية (2005). نمو المفاهيم العلمية للأطفال برنامج مقترح وتجارب لطفل ما قبل لمدرسة. الطبعة الأولى، ليبيا، دار الكتب لوطنية.

السقاف، صوفيا مهدي (2020). بناء دليل مفاهيمي في ضوء تقييم المعرفة المفاهيمية لمعلمي المرحلة الثانوية. جامعة عدن.

عباس، نزار (2014). أثر استخدام التمثيلات الرياضية في التحصيل الدراسي والاحتفاظ بالتعلم في مدة الرياضيات لدى طلاب الصف الأول المتوسط، مجلة كلية التربية، العراق، (21)، 305-338.

عبيد، وأليم؛ المفتي، محمد أمين؛ القمص؛ سمير إيليا (2000). تربويات الرياضيات، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة.

عفانة، عزو؛ السر، خالد؛ أحمد، منير؛ والخزندار، نائلة (2010). استراتيجيات تدريس الرياضيات في مراحل التعليم العام. الطبعة الأولى، آفاق للنشر والتوزيع، غزة.

Alonso- Tapia, J. (2002). **Knowledge assessment and concept understanding**. En M. Limón y L. Mason (Eds): Reframing the processes of conceptual change. (pp.389-413). Dordrecht: © Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Biza, I., Souyoul, A, & Zachariades, T. (2005). Conceptual Change in Advanced Mathematical Thinking. Department of Mathematics, University of Athens. **WRKING GROUP 14**, Advanced mathematical thinking, CERME 4 (2005). Pp 1727-1736.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. **Research in Mathematics Education**, 10(1), 53-70.

Biza, I & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. **The Journal of Mathematics Behavior**, 2010 December, 29(4):218-229.

Biza, I. (2011). Students Evolving Meaning About Tangent Line With The Mediation of Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space. **Citation preview**. TY - JOUR, 125- 151.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectives. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future** (pp.147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Moreira, V. & Pinto, M. (2004). Technical School Students' Conceptions of Tangent Lines. Proceeding of the **28th Conference of the**

- International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 2004, Vol 4, pp33-40.
- Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? **Educational Studies in Mathematics**, 89(2), 233-250.
- Stavropoulos, P.& Toultsinaki, M. (2010). **The Concept Of The Tangent In The Transition From Euclidean Geometry To Analysis - A Visualization Via Touch**. University of Athens. Greek.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, 12, 151- 169.
- Tall, D. (1987). Constructing the Concept of a Tangent. **Published in Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E.**, Montreal, III, 69–75, (1986).
- Tall, D. (2002). **Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics**. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, U.K.
- Vincent, B., LaRue, R., Sealey, V., & Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. 46(5), 641-657.
- Vincent, B. (2016). **First Semester Calculus Students' Concept Definitions and Concept Images of the Tangent Line and How These Relate to Students' Understandings of the Derivative**. [DOI:10.33915/etd.6876](https://doi.org/10.33915/etd.6876). Corpus ID: 125347399. Published 2016 Mathematics.
- Vincent, B. & Sealey, V. (2016). **Students' concept image of tangent lines compared to their understanding of the definition of the derivative**. West Virginia University. America.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. O. Tall (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Zimmerman, W. (1991). Visual thinking in mathematics. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), **Visualization in teaching and learning mathematics** (pp. 127-137). Washington, DC: Mathematical Association of America.

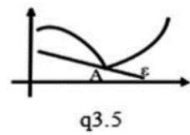
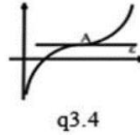
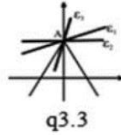
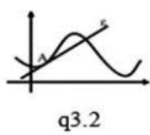
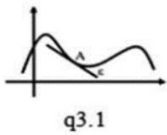
ملحق:

مقياس معرفة طلبة المستوى الأول بكليات التربية جامعة عدن لمفهوم المستقيم المماس

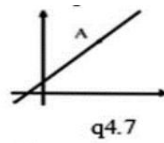
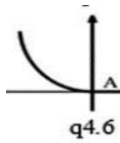
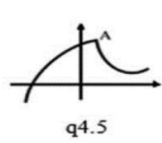
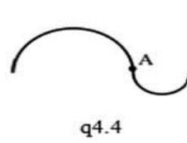
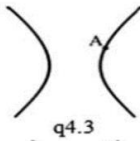
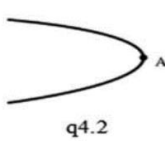
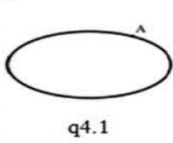
أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

س1/ اشرح بعبارات بسيطة ما الذي يعنيه مصطلح المستقيم المماس؟
 س2/ اكتب أكبر عدد ممكن من الخواص التي تربط بين المنحنى والمستقيم المماس له عند نقطة A.

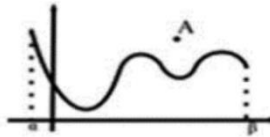
س3/ حدد أي من المستقيبات الآتية يعتبر مستقيما مماسا للمنحنيات المرافقة لها عند النقطة A، مع توضيح السبب.



س4/ ارسم المستقيم المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة A.



س5/ في الشكل التالي، ارسم اقصى عدد من المستقيبات المماس للمنحنى التالي والتي تمر بالنقطة A.



س6/ عرف المستقيم المماس لمنحنى دالة عند النقطة A.

س7/ افرض أن f دالة، وأن A(x₀, f(x₀)) نقطة على منحناها، اكتب معادلة المستقيم المماس للدالة f عند النقطة A، إن وجد.

س8/ أوجد معادلة المستقيم المماس للدالة f والمعرفة بالصيغة f(x)=(x-2)⁵+3 عند النقطة A(2, f(2)).